M9 Quadratwurzeln und reelle Zahlen — 1

Die **Quadratwurzel** (oder kurz **Wurzel**) von a ist diejenige nicht negative Zahl, die quadriert a ergibt.
Man schreibt: $\sqrt{a}$
Die Zahl a unter der Wurzel bezeichnet man als **Radikand**.

Bemerkung: Der Radikand darf nicht negativ sein! $a \geq 0$

Damit ist das Wurzelziehen die Umkehrung des Quadrierens! $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Zahlen, die sich nicht als endliche oder unendliche periodische Dezimalbrüche, d.h. nicht als Brüche darstellen lassen, nennt man **irrationale Zahlen**.
z.B. $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$

Die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die Menge der **reellen Zahlen IR**.

M9 Quadratwurzeln und reelle Zahlen — 1

Aufgaben:

1) Berechne ohne Verwendung des Taschenrechners! $\sqrt{6\frac{1}{4}} + \sqrt{3{,}61} + \sqrt{49}$
2) Berechne die Kantenlänge eines Würfels mit dem Oberflächeninhalt $1{,}5dm^2$!
3) Streiche falsche Aussagen durch!

$\boxed{\sqrt{2} \in \mathbb{Q}}$ $\boxed{\frac{3}{4} \in \mathbb{Z}}$ $\boxed{2 \in \mathbb{Q}_0^+}$ $\boxed{\sqrt{\frac{8}{2}} \in \mathbb{Z}}$ $\boxed{\frac{8}{2} \in \mathbb{N}}$ $\boxed{\sqrt{4} \in \mathbb{R}}$ $\boxed{0 \in \mathbb{Z}}$ $\boxed{-\frac{6}{4} \in \mathbb{Q}^-}$ $\boxed{\sqrt{11} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ $\boxed{-\sqrt{3} \in \mathbb{R}}$

Lösung:

1) $\sqrt{6\frac{1}{4}} + \sqrt{3{,}61} + \sqrt{49} = 2{,}5 + 1{,}9 + 7 = 11{,}4$
2) $6a^2 = 1{,}5dm^2$ => $a^2 = 0{,}25dm^2$ => $a = 0{,}5dm$
3)

$\boxed{\cancel{\sqrt{2} \in \mathbb{Q}}}$ $\boxed{\cancel{\frac{3}{4} \in \mathbb{Z}}}$ $\boxed{2 \in \mathbb{Q}_0^+}$ $\boxed{\sqrt{\frac{8}{2}} \in \mathbb{Z}}$ $\boxed{\frac{8}{2} \in \mathbb{N}}$ $\boxed{\sqrt{4} \in \mathbb{R}}$ $\boxed{0 \in \mathbb{Z}}$ $\boxed{-\frac{6}{4} \in \mathbb{Q}^-}$ $\boxed{\sqrt{11} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ $\boxed{-\sqrt{3} \in \mathbb{R}}$

M9 Rechnen mit Quadratwurzeln — 2

Rechenregeln:

Multiplikationsregel $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ für $a, b \geq 0$
Divisionsregel $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ bzw. $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$ für $a \geq 0, b > 0$

ACHTUNG: $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ für $a, b > 0$

Für jede reelle Zahl a gilt: $\sqrt{a^2} = |a|$ für $a \in IR$

Mithilfe der Multiplikationsregel kann man Wurzeln **teilweise radizieren**: z.B. $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$

Steht im **Nenner** eines Bruches eine Wurzel, so kann man diesen durch geeignete Umformungen **rational machen**:

z.B. 1) $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{5}$ 2) $\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}} = \frac{\sqrt{x-y} \cdot \sqrt{x+y}}{\sqrt{x+y} \cdot \sqrt{x+y}} = \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{|x+y|}$

3) $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{5 \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = \frac{5 \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})}{1} = 5 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})$ (mithilfe der 3. binomischen Formel)

M9 Rechnen mit Quadratwurzeln — 2

Aufgaben:

1) Vereinfache ohne Verwendung des Taschenrechners: $\sqrt{125} + \sqrt{5} - \sqrt{100}$
2) Setze für $\square$ einen passenden Term ein und ziehe dann die Wurzel! $\sqrt{4rs + r^2 + \square}$
3) Mache den Nenner rational und vereinfache so weit wie möglich! $\frac{3}{\sqrt{10a+3b}}$ $(a, b > 0)$
4) Wahr oder falsch? «Das Produkt zweier irrationaler Zahlen ist stets irrational.»

Lösung:

1) $\sqrt{125} + \sqrt{5} - \sqrt{20} = \sqrt{25 \cdot 5} + \sqrt{5} - \sqrt{4 \cdot 5} = 5\sqrt{5} + \sqrt{5} - 2\sqrt{5} = (5 + 1 - 2) \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$
2) $\sqrt{4rs + r^2 + \square} = \sqrt{r^2 + 4rs + \mathbf{4s^2}} = \sqrt{(r + 2s)^2} = |r + 2s|$
3) $\frac{3}{\sqrt{10a+3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{10a+3}}{\sqrt{10a+3b} \cdot \sqrt{10a+3b}} = \frac{3 \cdot \sqrt{10a+3}}{10a+3b}$
4) Aussage ist falsch, Gegenbeispiel: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

M9 Lösungsformel für quadratische Gleichungen | 3

Bei einer quadratischen Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0 \;\; (a \neq 0)$ unterscheidet man die folgenden Fälle:

1) Ist die **Diskriminante** $D = b^2 - 4ac < 0$, so hat die quadratische Gleichung keine Lösung.
2) Ist $D = 0$, s gibt es genau eine Lösung.
3) Ist $D > 0$, so hat die quadratische Gleichung die beiden Lösungen $x_{1/2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Anwendung:

- Bestimmung der Nullstellen einer quadratischen Funktion
- Bestimmung der Schnittstellen zweier geeigneter Funktionen

M9 Lösungsformel für quadratische Gleichungen | 3

Aufgaben:

1) Berechne alle Lösungen der quadratischen Gleichung: $(t-9)(t+8) = 2t^2 - 77 + 3t$
2) Untersuche die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von s: $\quad 4x^2 + sx = -9$
3) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 1$ und $g(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 1$

Lösung:

1) $t^2 - 9t + 8t - 72 = 2t^2 - 77 + 3t \;\; => \;\; -t^2 - 4t + 5 = 0$

   $$t_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot(-1)\cdot 5}}{-2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{-2} = \frac{4 \pm 6}{-2} = \begin{cases} -5 \\ 1 \end{cases}$$
2) $4x^2 + sx + 9 = 0 \;\; => \;\; D = b^2 - 4ac = s^2 - 4\cdot 4\cdot 9 = s^2 - 144$
   1. Fall: genau eine Lösung für $D = s^2 - 144 = 0$, d.h. $s = \pm 12$
   2. Fall: keine Lösung für $D = s^2 - 144 < 0$, d.h. $|s| < 12 \;\; => \;\; -12 < s < 12$
   3. Fall: zwei Lösungen für $D = s^2 - 144 > 0$, d.h. $|s| > 12 \;\; => \;\; s < -12$ oder $s > 12$
3) $\frac{1}{4}x^2 + x - 1 = -\frac{3}{4}x^2 + 1 \;\; => \;\; x^2 + x - 2 = 0 \;\; => x_{\frac{1}{2}} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-2)}}{2} = \frac{-1\pm3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

   Zugehörige Schnittpunkte $S_1(1/\frac{1}{4})$ und $S_2(-2/-2)$

M9 Quadratische Funktionen I | 4

Funktionen der Form $f{:}\, x \mapsto ax^2 + bx + c$ (mit $a, b, c \in IR, a \neq 0$) heißen **quadratische Funktionen**. Ihre Graphen nennt man **Parabeln**.

Sonderfall: Den Graphen von $g(x) = x^2$ bezeichnet man als **Normalparabel**.

Die Parabel der Funktion f ist
- nach oben geöffnet, falls $a > 0$
- nach unten geöffnet, falls $a < 0$
- weiter als die Normalparabel, falls $|a| < 1$
- enger als die Normalparabel, falls $|a| > 1$

Der **Scheitel(punkt)** $\boldsymbol{S(d/e)}$ einer Parabel ist der tiefste Punkt (falls die Parabel nach oben geöffnet ist) bzw. der höchste Punkt (falls sie nach unten geöffnet ist).

Wertemenge: $\quad a > 0 \;\; => \;\; W = [e; \infty[\qquad\qquad a < 0 \;\; => \;\; W =]-\infty; e]$

Monotonieverhalten einer Parabel:
$a > 0$: Der Graph fällt links des Scheitels und steigt rechts davon.
$a < 0$: Der Graph steigt links des Scheitels und fällt rechts davon.

M9 Quadratische Funktionen I | 4

Aufgaben:
Gegeben ist die quadratische Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{4}$.

1) Beschreibe das Aussehen des Graphen G_f!
2) Bestimme den Scheitel(punkt) der zugehörigen Parabel!
3) Gib die Wertemenge der Funktion f an und beschreibe das Monotonieverhalten der Parabel!

Lösung:

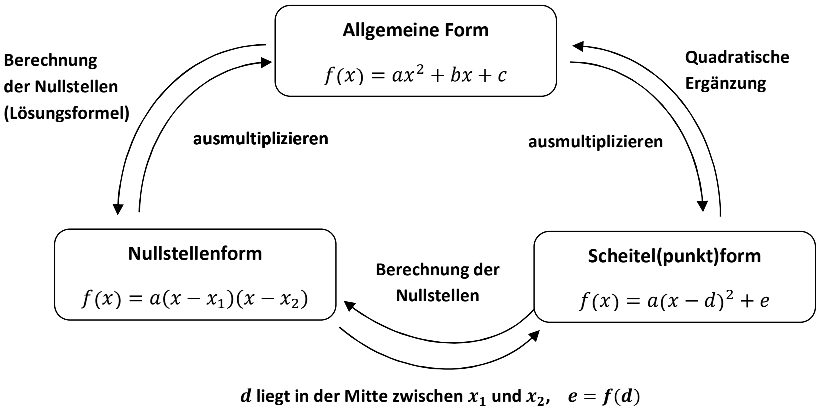
1) Die zugehörigen Parabel ist nach unten geöffnet und weiter als die Normalparabel.
2) Quadratische Ergänzung: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}(x^2 + 6x + 3^2 - 3^2) + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}[(x+3)^2 - 9] + \frac{1}{4}$

   $= -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 4{,}5 + 0{,}25 = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 4{,}75 \qquad => \;\; S(-3/4{,}75)$
3) $W =]-\infty; 4{,}75]$

   Der Graph steigt für $x < -3$ und fällt für $x > -3$

M9 Quadratische Funktionen II — 5

Man unterscheidet folgende Darstellungsformen für quadratische Funktionen:



M9 Quadratische Funktionen II — 5

Aufgaben:

Wandle in die jeweils anderen Darstellungsformen um!

1) $f(x) = -0{,}5(x+2)(x-3)$
2) $g(x) = -3(x-1)^2 + 12$
3) $h(x) = 2x^2 + 8x + 6$

Lösung:

1) Ausmultiplizieren: $f(x) = -0{,}5(x^2 + 2x - 3x - 6) = -0{,}5(x^2 - x - 6) = -0{,}5x^2 + 0{,}5x + 3$
   $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$ => $d = \frac{-2+3}{2} = 0{,}5$ => $e = f(0{,}5) = 3{,}125$ => $f(x) = -0{,}5(x - 0{,}5)^2 + 3{,}125$
2) Ausmultiplizieren: $g(x) = -3(x^2 - 2x + 1) + 12 = -3x^2 + 6x - 3 + 12 = -3x^2 + 6x + 9$
   $-3x^2 + 6x + 9 = 0$ => $x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (-3) \cdot 9}}{-6} = \frac{-6 \pm 12}{-6} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$ => $g(x) = -3(x+1)(x-3)$
3) Quadratisches Ergänzen: $h(x) = 2(x^2 + 4x) + 6 = 2(x^2 + 4x + 4 - 4) + 6 = 2(x+2)^2 - 2$
   $2x^2 + 8x + 6 = 0$ => $x_{1/2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{4} = \frac{-8 \pm 4}{4} = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$ => $h(x) = 2(x+1)(x+3)$

M9 Lineare Gleichungssysteme (siehe auch M8 – 15) — 6

Drei lineare Gleichungen mit drei gemeinsamen Variablen bilden ein **lineares Gleichungssystem**.

Beispiel: $(I)\ \ 2a + 5b - 3c = 14$
$(II)\ \ 3a - 5b - c = -11$
$(III)\ \ a + b + c = -1$

Zur Lösung verwendet man folgende Schritte:

1. Auflösen einer Gleichung nach einer der Variablen
2. Einsetzen des ermittelten Terms in die beiden anderen Gleichungen
3. Lösen des Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten (siehe M8 – 15)
4. Einsetzen der Lösung in die erste Gleichung zur Bestimmung der dritten Unbekannten

Anwendung:

- Aufstellen des Funktionsterms einer quadratischen Funktion durch drei beliebige Punkte

M9 Lineare Gleichungssysteme — 6

Aufgabe:
Bestimme einen Funktionsterm derjenigen Parabel, die durch die Punkte $A(-1/3), B(1{,}5/3{,}25)$ und $C(2/6)$ verläuft!

Lösung:
Ansatz: $y = ax^2 + bx + c$
Setze die drei Punkte in den allgemeinen Funktionsterm ein:
$(I)\ 3 = a - b + c$
$(II)\ 3{,}25 = 2{,}25a + 1{,}5b + c$
$(III)\ 6 = 4a + 2b + c$
Löse (I) nach c auf: $c = 3 - a + b$ und setze den Term in (II) und (III) ein:
$(II)\ 3{,}25 = 2{,}25a + 1{,}5b + 3 - a + b$ => $0{,}25 = 1{,}25a + 2{,}5b$
$(III)\ 6 = 4a + 2b + 3 - a + b$ => $3 = 3a + 3b$
Löse (III) nach a auf: $a = 1 - b$ und setze den Term in (II) ein:
$(II)\ 0{,}25 = 1{,}25(1 - b) + 2{,}5b$ => $0{,}25 = 1{,}25 - 1{,}25b + 2{,}5b$ => $b = -0{,}8$
Setze $b = -1$ in (III) ein: $a = 1 + 0{,}8 = 1{,}8$
Setze a, b in (I) ein: $c = 3 - 1{,}8 - 0{,}8 = 0{,}4$

Damit ergibt sich als Funktionsterm: $y = 1{,}8x^2 - 0{,}8x + 0{,}4$

M9 Schnittpunkte von Funktionsgraphen — 7

Um die Koordinaten der Schnittpunkte von zwei Graphen zu berechnen, geht man wie folgt vor:

1) Gleichsetzen der Funktionsterme
2) Lösen der Gleichung (mit Äquivalenzumformungen oder mit der Lösungsformel)
3) Einsetzen der x –Koordinate der Schnittpunkts oder der Schnittpunkte in einen der beiden Funktionsterme und Berechnen der y –Koordinate des Schnittpunkts.

M9 Schnittpunkte von Funktionsgraphen — 7

Aufgaben:

Berechne jeweils die Schnittpunkte der zugehörigen Funktionsgraphen:

1) $f(x) = (x+2)^2 - 1$ und $g(x) = x^2 - 3$
2) $f(x) = x^2 - x + 3$ und $g(x) = 2x + 1$
3) $f(x) = \frac{2}{2-x}$ und $g(x) = -x + 2$

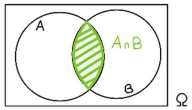
Lösung:

1) $(x+2)^2 - 1 = x^2 - 3 => x^2 + 4x + 4 - 1 = x^2 - 3 => 4x = -6 => x = -1{,}5 => S(-1{,}5/-0{,}75)$
2) $x^2 - x + 3 = 2x + 1 => x^2 - 3x + 2 = 0 => x_{\frac{1}{2}} = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} => S_1(2/5)\,,\; S_2(1/3)$
3) $\frac{2}{2-x} = -x + 2 => 2 = (-x+2)(2-x) => 2 = -2x + 4 + x^2 - 2x => x^2 - 4x + 2 = 0$
   $=> x_{1/2} = \frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2} = \frac{4\pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2} => S_1(2+\sqrt{2}/-\sqrt{2})\,, S_2(2-\sqrt{2}/\sqrt{2})$

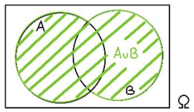
M9 Wahrscheinlichkeit verknüpfter Ereignisse — 8

Verknüpfungen zweier Ereignisse A und B eines Zufallsexperiments können mithilfe von **Mengendiagrammen** dargestellt werden. Dabei interessiert man sich besonders für die **Schnittmenge** und die **Vereinigungsmenge**:

Die **Schnittmenge** $\boldsymbol{A \cap B}$ besteht aus den Ergebnissen, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.



Die **Vereinigungsmenge** $\boldsymbol{A \cup B}$ besteht aus den Ergebnissen, die in A oder B enthalten sind. Im mathematischen Sinn beschreibt «in A oder B» die Fälle «entweder nur in A oder nur in B oder in beiden».



Die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten verschiedener Ereignisse können in **Vierfeldertafeln** wie folgt dargestellt werden.

	A	$\bar{A}$	
B	$P(A\cap B)$	$P(\bar{A}\cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A\cap \bar{B})$	$P(\bar{A}\cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

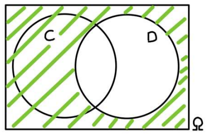
Es gilt der **Additionssatz**: $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

M9 Wahrscheinlichkeit verknüpfter Ereignisse — 8

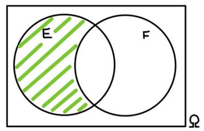
Aufgaben:

1) Gib jeweils an, welche Menge durch die Schraffur dargestellt ist!

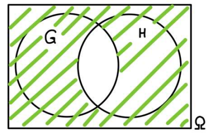
a)



b)



c)



2) A und B sind Ereignisse eines Zufallsexperiments. Beschreibe folgende Wahrscheinlichkeiten in Worten!
   1) $P(\bar{A}\cup B)$ b) $P(\overline{A\cap B})$ c) $P((\bar{A}\cap B)\cup(A\cap\bar{B}))$

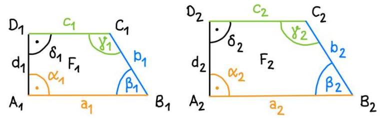
Lösung:

1) a) $\Omega \setminus D$ b) $E \setminus F$ c) $\Omega \setminus (G\cap H)$
2) a) Die Wahrscheinlichkeit, dass das Gegenereignis von A oder das Ereignis B eintritt.
   b) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Ereignisse A und B nicht gleichzeitig eintreten.
   c) Die Wahrscheinlichkeit, dass nur genau eines der beiden Ereignisse eintritt.

M9 Ähnlichkeit (siehe auch M7 – 15) | 9

Zwei Figuren F und G heißen zueinander **ähnlich**, wenn man sie durch maßstäbliches Vergrößern oder Verkleinern auf zueinander kongruente (siehe M7 – 15) Figuren abbilden kann. Der Faktor, mit dem alle Streckenlängen multipliziert werden, heißt **Ähnlichkeitsfaktor k**. Man schreibt dann: $F \sim G$

Eigenschaften ähnlicher Figuren:

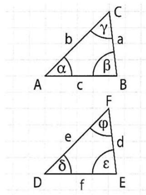


- Entsprechende Winkel sind gleich groß:
  $\alpha_1 = \alpha_2,\quad \beta_1 = \beta_2,\quad \gamma_1 = \gamma_2,\quad \delta_1 = \delta_2$
- Entsprechende Strecken haben stets das gleiche Längenverhältnis: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{d_2}{d_1} = k$
- Jede **Streckenlänge** in F_2 hat den $\boldsymbol{k}$ –fachen Wert der entsprechenden Streckenlänge in F_1.
  Der **Flächeninhalt** von F_2 hat den $\boldsymbol{k^2}$ –fachen Wert des Flächeninhalts von F_1.
  Bei Körpern: Das **Volumen** von K_2 hat den $\boldsymbol{k^3}$ –fachen Wert des Volumens von K_1.

Ähnlichkeitssätze für Dreiecke:
Zwei Dreiecke sind genau dann ähnlich, wenn sie:
1) im Verhältnis entsprechender Seitenlängen übereinstimmen (**S:S:S – Satz**)
2) in 2 (und damit in allen 3) Winkeln übereinstimmen (**WW – Satz**)
3) in einem Winkel und dem Verhältnis der anliegenden Seiten übereinstimmen (**S:W:S – Satz**)
4) im Verhältnis zweier entsprechender Seiten und dem Gegenwinkel der längeren Seite übereinstimmen. (**S:s:W – Satz**)

M9 Ähnlichkeit | 9

Aufgaben:



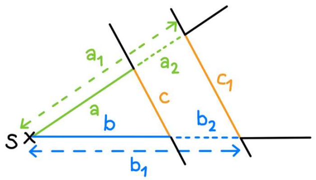
1) Untersuche jeweils begründet, ob die Dreiecke ABC und DEF zueinander ähnlich sind!
   a) $\alpha = 55°, \beta = 30°, \delta = 30°, \varepsilon = 95°$
   b) $c = 12cm, a = 9cm, \beta = 66°, f = 14{,}4cm, d = 10{,}8cm$ und $\varepsilon = 66°$
   c) $a = b = c$ und $d = e = f$
2) Zwei ähnliche Vielecke haben die Flächeninhalte $A_1 = 50cm^2$ und $A_2 = 72cm^2$.
   Der Umfang des ersten Vielecks beträgt $U_1 = 48cm$. Berechne U_2!

Lösung:
1) a) $\gamma = 180° - 55° - 30° = 95°$ => $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (nach WW)
   b) $\frac{14{,}4cm}{12cm} = 1{,}2$ und $\frac{10{,}8cm}{9c} = 1{,}2$ => $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (nach S:W:S)
   c) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (nach S:S:S)
2) $k^2 = \frac{A_2}{A_1} = \frac{72cm^2}{50cm^2} = 1{,}44 \Rightarrow k = 1{,}2 \Rightarrow U_2 = k \cdot U_1 = 1{,}2 \cdot 48cm = 57{,}6cm$

M9 Strahlensatz | 10

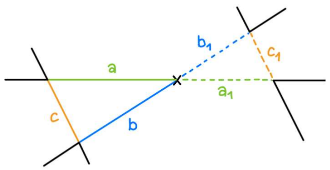
Strahlensatz bei der V – Figur
Werden zwei Halbgeraden mit dem gleichen Anfangspunkt S von zwei parallelen Geraden wie rechts abgebildet geschnitten, so gilt:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} \quad \text{und} \quad \frac{a_2}{a} = \frac{b_2}{b}$$



Strahlensatz bei der X – Figur
Werden zwei Geraden mit dem Schnittpunkt S von zwei parallelen Geraden wie rechts abgebildet geschnitten, so gilt:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$$



M9 Strahlensatz | 10

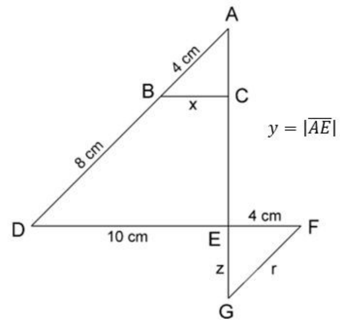
Aufgabe:
In der nebenstehenden (nicht maßstäblichen Figur) gelte:

$AD \parallel FG$ und $BC \parallel DF$

Die Strecke $\overline{AG}$ habe die Länge $|\overline{AG}| = 21cm$.

Berechne die Streckenlängen x, r, y und z!

Runde wo nötig dein Ergebnis auf mm!

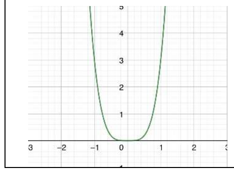
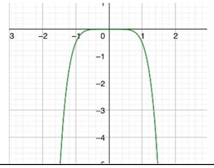
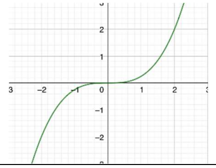
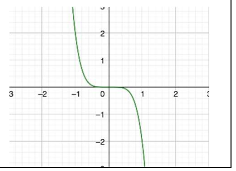


Lösung:
$\frac{x}{10cm} = \frac{4cm}{4cm+8} \Rightarrow x = \frac{4}{12} \cdot 10cm = 3\frac{1}{3}cm$
$\frac{r}{12cm} = \frac{4cm}{10cm} \Rightarrow r = \frac{4}{10} \cdot 12cm = 4{,}8cm$
$\frac{y}{z} = \frac{10cm}{4cm} \Rightarrow \frac{21cm - z}{z} = \frac{10cm}{4cm} \Rightarrow 21cm - z = 2{,}5z \Rightarrow 21cm = 3{,}5z \Rightarrow z = 6cm$
$y = 21cm - z = 15cm$

M9 Potenzfunktionen | 11

Eine Funktion $f: x \mapsto ax^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a \in IR \setminus \{0\}$ heißt **Potenzfunktion vom Grad n.**

Eigenschaften:

***n* gerade**		***n* ungerade**	
Graph achsensymmetrisch bezüglich der $y-$ Achse		Graph punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs	
$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$
$W = IR_0^+$	$W = IR_0^-$	$W = IR$	$W = IR$
Der Graph verläuft von links oben nach rechts oben	Der Graph verläuft von links unten nach rechts unten	Der Graph verläuft von links unten nach rechts oben	Der Graph verläuft von rechts oben nach links unten
Beispiel: $f(x) = 3x^4$ 	Beispiel: $f(x) = -0{,}5x^6$ 	Beispiel: $f(x) = 0{,}25x^3$ 	Beispiel: $f(x) = -2x^5$ 

Alle Graphen verlaufen durch die Punkte $(0/0)$ und $(1/a)$.

M9 Potenzfunktionen | 11

Aufgaben:

1) Beschreibe jeweils den charakteristischen Verlauf und die Symmetrie der Graphen gib die Wertemenge an!
   a) $f(x) = -0{,}5x^3$ b) $g(x) = -2x^4$

2) Gib zwei Potenzfunktionen unterschiedlichen Grades an, deren Graphen die folgenden Eigenschaften haben:
   a) Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung und fällt im Intervall $]0; \infty[$.
   b) Der Graph verläuft von links unten nach rechts unten und geht durch den Punkt $P(-1/-5)$.

Lösung:

1) a) G_f verläuft von links oben nach rechts unten, ist punktsymmetrisch zum Ursprung und hat die Wertemenge $W = IR$.
   b) G_g verläuft von links unten nach rechts unten, ist achsensymmetrisch zur $y-$ Achse und hat die Wertemenge $W =]-\infty; 0]$

2) a) z.B. $f(x) = -3x^5$ oder $g(x) = -x$
   b) z.B. $f(x) = -0{,}5x^4$ oder $g(x) = -2x^2$

M9 n-te Wurzeln und Potenzgleichungen | 12

Die ***n* −te Wurzel von *a*** $(a \geq 0)$ ist diejenige nicht negative Zahl, deren n −te Potenz a ergibt.

Man schreibt: $\sqrt[n]{a}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$

Beim Lösen von **Potenzgleichungen der Form $x^n = c$** $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2, c \in IR \setminus \{0\})$ unterscheidet man folgende Fälle:

***n* gerade**		***n* ungerade**	
$c > 0$	$c < 0$	$c > 0$	$c < 0$
Zwei Lösungen $x_{1/2} = \pm\sqrt[n]{c}$	Keine Lösung	Eine Lösung $x_1 = \sqrt[n]{c}$	Eine Lösung $x_1 = -\sqrt[n]{\lvert c \rvert}$

Anwendung:
Berechnung der Schnittpunkte der Graphen zweier Potenzfunktionen

M9 n-te Wurzeln und Potenzgleichungen | 12

Aufgaben:
Löse die folgenden Gleichungen:

1) $3x^3 - 4 = 20$
2) $x^9 - 1 = -20$
3) $8 + \frac{1}{8}x^8 = -120$

Lösung:

1) $3x^3 = 24 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x_1 = 2$
2) $x^9 = -19 \Rightarrow x_1 = -\sqrt[9]{19}$
3) $\frac{1}{8}x^8 = -128 \Rightarrow x^8 = -1024$ keine Lösung

M9 Potenzgesetze | 13

Potenzen mit rationalen Exponenten und allgemeine Wurzeln:

Für $a > 0, z \in \mathbb{Z}$ und $n \in IN, n \geq 2$ gilt:

$a^{\frac{z}{n}} = \sqrt[n]{a^z}$ und $a^{-\frac{z}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^z}}$ und $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Potenzgesetze:

Für $a, b > 0$ und rationale Exponenten r und s gilt:

1. Potenzen mit gleicher Basis: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ und $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
2. Potenzen mit gleichem Exponenten: $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$ und $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$
3. Potenzen von Potenzen: $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

M9 Potenzgesetze | 13

Aufgaben:
Vereinfache soweit wie möglich! Es gelte: $a, b, x, y > 0$

a) $\sqrt{\sqrt[3]{(a^9)^4}}$ b) $y^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[4]{xy^5} : \sqrt[4]{x^5y^2}$ c) $\left(\frac{b^8}{81a^4}\right)^{-\frac{1}{6}} : \sqrt[3]{\frac{b^8}{3a^4}}$

Lösung:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{a^{36}}} = \sqrt{a^{36 \cdot \frac{1}{3}}} = \sqrt{a^{12}} = a^{\frac{12}{2}} = a^6$

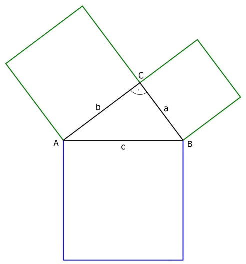
b) $y^{\frac{1}{4}} \cdot (xy^5)^{\frac{1}{4}} : (x^5y^2)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{y \cdot xy^5}{x^5y^2}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{y^4}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{y}{x}$

c) $\left(\frac{81a^4}{b^8}\right)^{\frac{1}{6}} : \left(\frac{b^8}{3a^4}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{81^{\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{4}{6}}}{b^{\frac{4}{3}}} : \frac{b^{\frac{8}{3}}}{3^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}}} = \frac{81^{\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}}}{b^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{8}{3}}} = \frac{(9^2)^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot a^2}{b^4} = \frac{9^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot a^2}{b^4} = \frac{(9 \cdot 3)^{\frac{1}{3}} \cdot a^2}{b^4} = \frac{3a^2}{b^4}$

M9 Der Satz des Pythagoras | 14

Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der beiden Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrats.



Im rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse c gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Kehrsatz zum Satz des Pythagoras

Wenn für die Seiten a, b und c eines Dreiecks gilt: $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist das Dreieck rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C.

Anwendung:

- Höhe im gleichseitigen Dreieck (Seitenlänge a) : $h = \frac{1}{2}\sqrt{3}a$
- Diagonale eines Quadrats (Seitenlänge a) : $d = \sqrt{2}a$
- Raumdiagonale eines Würfels (Kantenlänge a) : $e = \sqrt{3}a$

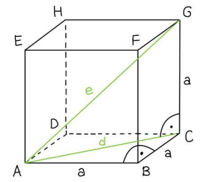
M9 Der Satz des Pythagoras | 14

Aufgaben:

1) a) Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem die beiden Katheten die Länge 2dm und 21cm haben. Berechne die Länge der Hypotenuse!
   b) In einem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete $40m$ lang, die Hyptenusenlänge beträgt $41m$. Berechne die Länge der zweiten Kathete!
2) Untersuche, ob das Dreieck mit den Seitenlängen $3dm$, $20cm$ und $2dm$ rechtwinklig ist!
3) Leite die Formel $e = \sqrt{3}a$ für die Raumdiagonale eines Würfels her!

Lösung:

1) a) $c^2 = a^2 + b^2 = (2dm)^2 + (21cm)^2 = 400cm^2 + 441cm^2 = 841cm^2 => c = 29cm$
   b) $a^2 = c^2 - b^2 = (41m)^2 - (40m)^2 = 1681m^2 - 1600m^2 = 81m^2 => a = 9m$
2) Man muss untersuchen, ob die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllt ist:
   $(3dm)^2 = (30cm)^2 = 900cm^2$
   $(20cm)^2 + (2dm)^2 = 400cm^2 + 400cm^2 = 800cm^2$
   Da die Ergebnisse ungleich sind, ist das Dreieck nicht rechtwinklig.
3) Es gilt: $d^2 = a^2 + a^2$ (Satz des Pythagoras im Dreieck ABC),
   $=> d = \sqrt{2}a$
   Zudem: $e^2 = |\overline{AC}|^2 + |\overline{CG}|^2 = d^2 + a^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$
   $=> e = \sqrt{3}a$



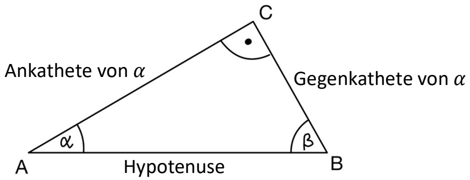
M9 Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck — 15

Für die Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$sin\alpha = \frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Hypotenuse}$

$cos\alpha = \frac{Ankathete\ von\ \alpha}{Hypotenuse}$

$tan\alpha = \frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Ankathete\ von\ \alpha}$



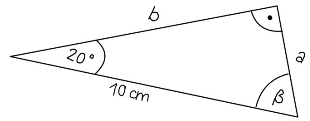
Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens für alle Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 90°$:

1. $sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ und $cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$
2. $(sin\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = 1$ (trigonometrischer Pythagoras)
3. $tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ $(\alpha \neq 90°)$

M9 Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck — 15

Aufgaben:

1) Berechne die fehlenden Seitenlängen und den Winkel!
2) Zeige die Gültigkeit der Gleichung:
   $\frac{1}{cos^2\alpha} = 1 + tan^2\alpha$



Lösung:

1) $sin\alpha = \frac{a}{10cm} => a = 10cm \cdot sin\alpha = 10cm \cdot sin20° \approx 3{,}4cm$
   $cos\alpha = \frac{b}{10cm} => b = 10cm \cdot cos\alpha = 10cm \cdot cos20° \approx 9{,}4cm$
   $\beta = 180° - 90° - 20° = 70°$
2) $\frac{1}{cos^2\alpha} = 1 + \left(\frac{sin\alpha}{cos\alpha}\right)^2 => \frac{1}{cos^2\alpha} = 1 + \frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}$ $|\cdot cos^2\alpha$
   $=> 1 = cos^2\alpha + sin^2\alpha$ (trigonometrischer Pythagoras)

M9 Sinussatz und Kosinussatz — 16

In jedem beliebigen Dreieck ABC gilt:

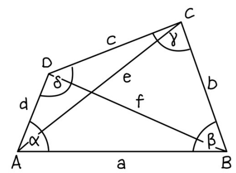
1. **Sinussatz** $\frac{a}{b} = \frac{sin\alpha}{sin\beta}$; $\frac{a}{c} = \frac{sin\alpha}{sin\gamma}$ und $\frac{b}{c} = \frac{sin\beta}{sin\gamma}$

2. **Kosinussatz** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\alpha$
   $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\beta$
   $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\gamma$

M9 Sinussatz und Kosinussatz — 16

Aufgaben:

1) Berechne alle fehlenden Seitenlängen und Winkel des Dreiecks ABC, wenn gilt:
   $a = 5cm, b = 4cm, \alpha = 60°$
2) Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkel des Vierecks $ABCD$, wenn gilt:
   $a = 12cm, b = 8cm, c = 6cm, d = 7cm, \alpha = 71°$ und $\beta = 65°$



Lösung:

1) Sinussatz: $\frac{sin\alpha}{sin\beta} = \frac{a}{b} => sin\beta = \frac{b}{a} \cdot sin\alpha = \frac{4cm}{5cm} \cdot sin60° = \frac{2}{5}\sqrt{3} => \beta \approx 43{,}9°$
   $\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 180° - 60° - 43{,}9° = 76{,}1°$
   Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\gamma => c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\gamma}$
   $c = \sqrt{25cm^2 + 16cm^2 - 2 \cdot 5cm \cdot 4cm \cdot cos76{,}1°} \approx 5{,}6cm$
2) Kosinussatz: $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\beta => e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\beta} \approx 11cm$
   Kosinussatz: $e^2 = d^2 + c^2 - 2dc \cdot cos\delta => cos\delta = \frac{d^2 + c^2 - e^2}{2d} => \delta \approx 115°$
   $\gamma = 360° - \alpha - \beta - \delta \approx 360° - 71° - 65° - 115° = 109$
   Kosinussatz: $f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot cos\alpha => f = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cdot cos\alpha} \approx 12cm$